



# مساحت دوزنقه بر حسب چهار ضلع آن

و با جای گذاری مقادیر مفروض داریم:

$$h^2 = \frac{c^2 d^2 - [(b-a)^2 - c^2 - d^2]^2 / 4}{c^2 + d^2 + (b-a)^2 - c^2 - d^2}$$

$$h^2 = \frac{4c^2 d^2 - [(b-a)^2 - c^2 - d^2]^2}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{(2cd - (b-a)^2 + c^2 + d^2)(2cd + (b-a)^2 - c^2 - d^2)}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{[(d+c)^2 - (b-a)^2][(b-a)^2 - (d-c)^2]}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{(d+c+b-a)(d+c-b+a)(b-a-d+c)(b-a+d-c)}{4(b-a)^2}$$

و با توجه به اینکه:  $a+b+c+d=2p$

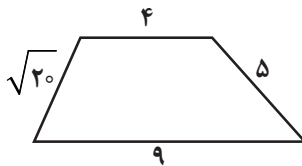
$$h^2 = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2a-2d)(2p-2a-2c)}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{4(p-a)(p-b)(p-a-d)(p-a-c)}{4(b-a)^2}$$

و از دستور محاسبه مساحت دوزنقه نتیجه می شود:

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{b-a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$



**مثال:** مساحت دوزنقه  
مقابل را حساب کنید.

$$p = \frac{4+9+5+2\sqrt{5}}{2} = 9+\sqrt{5}$$

$$S = \frac{4+9}{9-4} \sqrt{(9+\sqrt{5}-4)(9+\sqrt{5}-9)(9+\sqrt{5}-5-4)(9+\sqrt{5}-4-2\sqrt{5})}$$

$$S = \frac{13}{5} \sqrt{(\Delta+\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta})(\Delta-\sqrt{\Delta})}$$

$$S = \frac{13}{5} \sqrt{(\Delta^2 - \Delta) \times \Delta} = \frac{13}{5} \sqrt{20 \times 5} = \frac{13 \times 10}{5} = 26$$

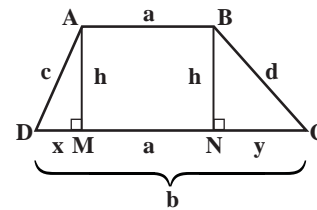
محاسبه مساحت دوزنقه با قاعده‌های کوچک و بزرگ  $a$  و  $b$  ( $b > a$ ) و ساق‌های  $d$  و  $c$  براساس قضیه (دستور) زیر قابل انجام است.

**قضیه:** مساحت دوزنقه با قاعده‌های  $a$  و  $b$  ( $b > a$ ) و ساق‌های  $d$  و  $c$  برابر است با:

$$S = \frac{a+b}{b-a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$

که در آن،  $p$  نصف محیط دوزنقه است؛ یعنی:

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$



**پرهان:** دوزنقه روبرو  
را در نظر بگیرید که در  
آن ارتفاع وارد بر قاعده‌ها  
رسم شده است. بنابر قضیه  
فیثاغورس می توان نوشت:

$$\triangle ADM: h^2 + x^2 = c^2 \Rightarrow x = \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$\triangle BNC: h^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - h^2}$$

اما:  $x+y+a=b$  بنابراین:

$$\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{d^2 - h^2} = b - a$$

اکنون برای به دست آوردن  $z=h^2$  معادله فوق را حل می کنیم:

$$c^2 - z + d^2 - z + 2\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = (b-a)^2$$

$$2\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = 2z + (b-a)^2 - c^2 - d^2$$

برای آسان شدن انجام محاسبات فرض می کنیم:

$$(b-a)^2 - c^2 - d^2 = 2t$$

در این صورت معادله اخیر چنین می شود:

$$\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = z + t$$

$$c^2 d^2 - (c^2 + d^2)z + z^2 = z^2 + 2tz + t^2$$

$$z = \frac{c^2 d^2 - t^2}{c^2 + d^2 + 2t}$$